Thermodynamique et mécanique des fluides – Chapitre 6

Description d'un fluide en écoulement stationnaire

I. Description d'un écoulement . . . 1
I.1. Point de vue lagrangien . . . 1
I.2. Point de vue eulérien . . . 1
I.3. Comparaison des deux points de vue . . . 2
I.4. Caractérisation d'un écoulement . . . 2
II. Notion de débits . . . 2
II.1. Débit massique . . . 2
II.2. Débit volumique . . . 4
III. Notion de viscosité . . . 5
III.1. Force surfacique de viscosité . . . 5
III.2. Fluide parfait . . . 5
III.3. Fluide newtonien . . . 5

I. Description d'un écoulement

L'étude de l'écoulement d'un fluide peut être réalisée à l'aide de deux points de vue : le point de vue lagrangien et le point de vue eulérien.

I.1. Point de vue lagrangien

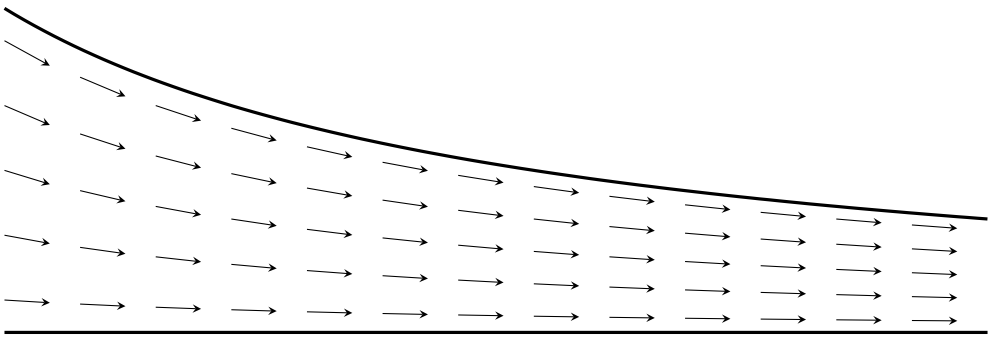
Du **point de vue lagrangien**, on décompose le fluide en un ensemble de particule de fluide, chacune repérée par sa position $\overrightarrow{OM}_i$ et sa vitesse $\overrightarrow{V}_i = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}_i}{\mathrm{d}t}$. L'écoulement du fluide est décrit en suivant indépendamment la trajectoire empruntée par chaque particule de fluide. C'est le point de vue que l'on adopte en mécanique du point matériel et en mécanique du solide.

Si on veut caractériser entièrement l'écoulement du fluide avec ce point de vue, il est alors nécessaire de suivre toutes les particules de fluide constituant cet écoulement, ce qui est fastidieux. Le point de vue lagrangien n'est donc pas très adapté à l'étude de l'écoulement d'un fluide.

I.2. Point de vue eulérien

Du **point de vue eulérien**, l'écoulement du fluide est décrit par son **champ de vitesse** $\vec{v}(x,y,z,t)$ indiquant la vitesse du fluide à la position (x,y,z) à un instant t. On ne suit donc pas la trajectoire d'une particule de fluide particulière, mais de toutes les particules qui passent par une position donnée.

On représente ci-dessous un exemple de champ de vitesse $\vec{v}(x,y,z,t_0)$ pour un écoulement à un instant t_0 :

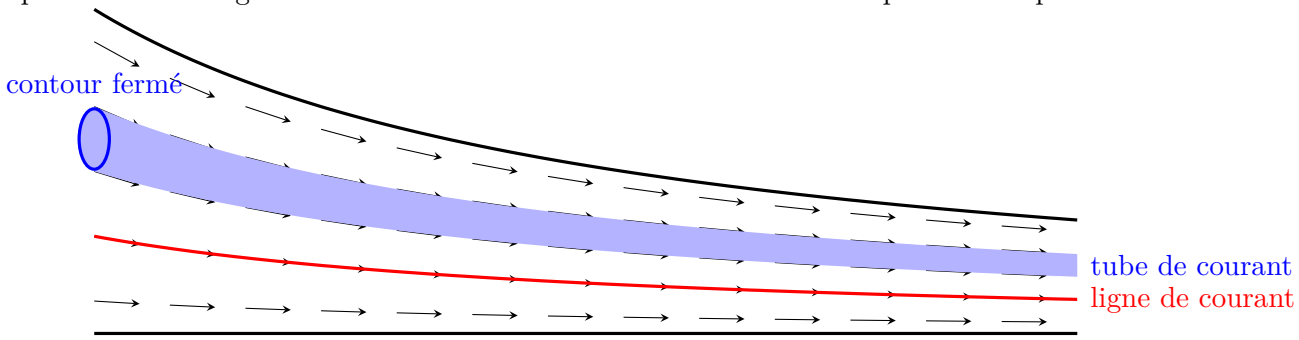


- Une **ligne de courant** est une ligne tangente en chacun de ses points à la vitesse $\vec{v}$ du fluide à un instant donné.

- Un **tube de courant** est un ensemble de lignes de courant passant par un contour fermé.

Application :

Représentons une ligne de courant et un tube de courant sur cet exemple de champ de vitesse.



I.3. Comparaison des deux points de vue

Prenons l'exemple d'une autoroute où les voitures représentent les particules de fluide. La police souhaite contrôler la vitesse des automobilistes afin de s'assurer qu'il n'y a pas d'excès de vitesse.

- Avec un point de vue lagrangien, on place un policier dans chaque voiture qui regarde le compteur de vitesse, il y a donc un observateur par particule de fluide.
- Avec un point de vue eulérien, on place un radar sur chaque tronçon d'autoroute qui mesure la vitesse des voitures, il y a donc un observateur par position donnée.

I.4. Caractérisation d'un écoulement

Parmi les différentes caractéristiques d'un écoulement que l'on peut étudier, il faut retenir que :

- un écoulement est dit **uniforme** si $\vec{v}$ est identique en tout point de l'espace ;
- un écoulement est dit **stationnaire** si $\vec{v}$ est indépendant du temps ;
- un écoulement est dit **incompressible** si la masse volumique des particules de fluide est identique en tout point de l'espace et indépendante du temps.

Dans le cas d'un écoulement stationnaire, les trajectoires des particules et les lignes de courant se confondent souvent, mais ce n'est pas le cas pour un écoulement quelconque.

II. Notion de débits

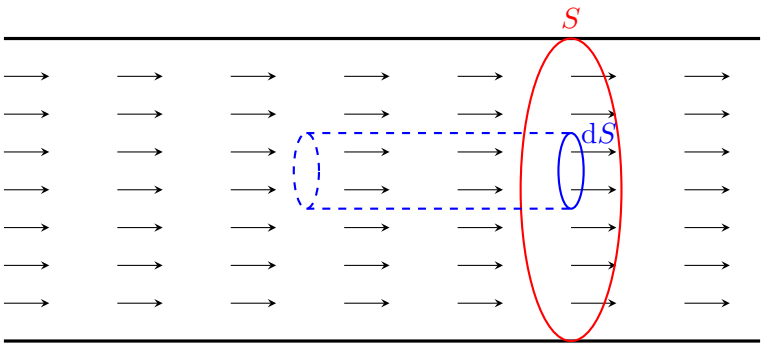
II.1. Débit massique

Le **débit massique** D_m à travers une surface correspond à la masse de fluide qui traverse cette surface par unité de temps, il s'exprime en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

En notant $\mathrm{d}m$ la masse de fluide qui traverse la surface S pendant un temps $\mathrm{d}t$, on peut exprimer le débit massique :

$$\boxed{D_\mathrm{m} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}.$$

On souhaite exprimer le débit massique d'un écoulement dans une conduite en fonction de son champ de vitesse $\vec{v}$ et de sa masse volumique ρ. On considère dans un premier temps une surface S dont la normale est orientée dans le sens de l'écoulement du fluide, que l'on décompose en un ensemble de surface élémentaire $\mathrm{d}S$.



Les particules de fluide traversant une surface élémentaire $\mathrm{d}S$ pendant $\mathrm{d}t$ sont comprises dans le cylindre de volume $v\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S$, et représentent donc une masse $\rho\,v\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S$. On en déduit la masse totale traversant la surface S pendant $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}m = \iint_S \rho\,v\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S$$

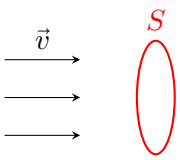
d'où l'expression du débit massique :

$$D_\mathrm{m} = \iint_S \rho\,v\,\mathrm{d}S.$$

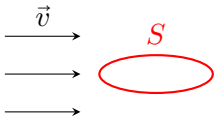
On peut généraliser ce résultat pour une surface S quelconque, dont la normale n'est pas forcément orientée dans le sens de l'écoulement du fluide, et on obtient alors l'expression du débit massique :

$$\boxed{D_\mathrm{m} = \iint_S \rho\,\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}.$$

Pour justifier le produit scalaire, on peut étudier les deux cas limites suivants :



- pour une surface S perpendiculaire au champ de vitesse $\vec{v}$, on obtient : $\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = v\,\mathrm{d}S$, et on retrouve le débit massique : $D_\mathrm{m} = \iint_S \rho\,v\,\mathrm{d}S$;



- pour une surface S parallèle au champ de vitesse $\vec{v}$, on obtient : $\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$, d'où un débit massique nul à travers cette surface.

Application :

On considère un fluide incompressible de masse volumique ρ en écoulement stationnaire dans une conduite cylindrique de rayon R et d'axe (Oz). On suppose que le champ de vitesse est donné par la loi de Poiseuille :

$$\vec{v} = v_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\vec{e}_z.$$

Exprimons le débit massique à travers une section droite de la conduite.

Le débit massique s'exprime : $D_\mathrm{m} = \iint_S \rho\,\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \rho\iint_S v_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\mathrm{d}S$, soit :

$$D_\mathrm{m} = \rho\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\,\pi} v_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \rho\,v_0\int_{r=0}^{R}\left(r-\frac{r^3}{R^2}\right)\mathrm{d}r\int_{\theta=0}^{2\,\pi}\mathrm{d}\theta,\ \text{d'où :}$$

$$D_\mathrm{m} = \rho\,v_0\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4\,R^2}\right]_0^R[\theta]_0^{2\,\pi} = \rho\,v_0\left(\frac{R^2}{2}-\frac{R^4}{4\,R^2}\right)2\,\pi = \frac{\rho\,v_0\,\pi\,R^2}{2}.$$

Dans le cas d'un écoulement uniforme et incompressible à travers une surface S dont la normale est orientée dans le sens de l'écoulement du fluide, on obtient l'expression simplifiée :

$$D_{\mathrm{m}} = \rho\, v\, S.$$

On peut également montrer que le débit massique se converse le long d'un tube de courant pour un écoulement stationnaire.

II.2. Débit volumique

Le **débit volumique** D_{V} à travers une surface correspond au volume de fluide qui traverse cette surface par unité de temps, il s'exprime en $\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

En notant $\mathrm{d}V$ le volume de fluide qui traverse la surface S pendant un temps $\mathrm{d}t$, on peut exprimer le débit volumique :

$$\boxed{D_{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}}.$$

De façon équivalente au début massique, on montre que le débit volumique à travers une surface S quelconque s'exprime :

$$\boxed{D_{\mathrm{V}} = \iint_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}.$$

Pour un écoulement incompressible, on peut relier le débit massique au débit volumique :

$$D_{\mathrm{m}} = \iint_S \rho\, \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \rho \iint_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \rho\, D_{\mathrm{V}}.$$

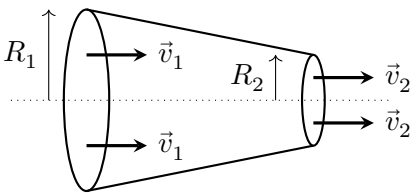
Dans le cas d'un écoulement uniforme à travers une surface S dont la normale est orientée dans le sens de l'écoulement du fluide, on obtient l'expression simplifiée :

$$D_{\mathrm{V}} = v\, S.$$

On peut montrer que le débit volumique se converse le long d'un tube de courant pour un écoulement stationnaire et incompressible.

Application :

On considère un écoulement stationnaire et incompressible dans une conduite à symétrie cylindrique dont le rayon passe progressivement de R_1 en entrée à $R_2 = \dfrac{R_1}{2}$ en sortie. On suppose que la vitesse v_1 du fluide est uniforme sur toute la section en entrée, et que la vitesse v_2 du fluide est uniforme sur toute la section en sortie.



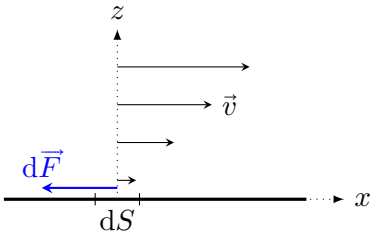
Exprimons la vitesse v_2 en fonction de la vitesse v_1.

Comme l'écoulement est stationnaire et incompressible, le débit volumique se conserve dans la conduite, donc : $D_{\mathrm{V},1} = D_{\mathrm{V},2}$, avec $D_{\mathrm{V},1} = v_1\, S_1 = v_1\, \pi\, R_1^2$ et $D_{\mathrm{V},2} = v_2\, S_2 = v_2\, \pi\, R_2^2$, soit : $v_1\, \pi\, R_1^2 = v_2\, \pi\, R_2^2$, d'où : $v_2 = 4\, v_1$.

III. Notion de viscosité

III.1. Force surfacique de viscosité

Considérons l'écoulement d'un fluide à proximité d'une paroi de normale $\vec{e}_z$ dont le champ de vitesse s'exprime de la forme $\vec{v} = v(z)\,\vec{e}_x$. On peut montrer que chaque élément de surface $\mathrm{d}S$ de la paroi exerce sur le fluide à proximité une force qui s'oppose à son écoulement et qui s'exprime :



$$\mathrm{d}\vec{F} = -\eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}S\,\vec{e}_x$$

avec η la **viscosité dynamique** du fluide.

Par analogie avec la mécanique du point matériel et la mécanique du solide, la viscosité d'un fluide traduit les **frottements** de celui-ci sur une paroi. Elle est alors responsable de la dissipation de l'énergie cinétique d'un fluide au cours de son écoulement, et donc de l'irréversibilité de son écoulement du point de vue thermodynamique.

Application :

Montrons que la viscosité dynamique d'un fluide peut s'exprimer en $\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$.

$$\text{L'unité de la viscosité dynamique est : } [\eta] = \frac{[\mathrm{d}F]\,[\mathrm{d}z]}{[\mathrm{d}v]\,[\mathrm{d}S]} = \frac{\mathrm{N\ m}}{\mathrm{m\cdot s^{-1}\ m^2}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}}\cdot\mathrm{s} = \mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}.$$

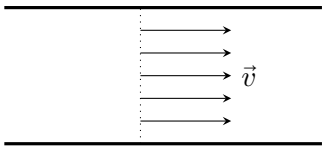
La viscosité dynamique d'un fluide varie généralement avec sa température. On donne quelques ordres de grandeur à connaitre :

- air à 20°C sous 1 bar : $\eta = 1{,}8.10^{-5}\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$;
- eau à 20°C : $\eta = 1{,}0.10^{-3}\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$;
- eau à 50°C : $\eta = 5{,}6.10^{-4}\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$;
- huile de moteur : $\eta \sim 0{,}1\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$.

III.2. Fluide parfait

Un **fluide parfait** est un fluide qui s'écoule avec une **viscosité nulle**.

Même si un fluide n'est jamais rigoureusement parfait, cette approximation est souvent réalisée afin de simplifier l'étude de son écoulement. En effet, comme un fluide parfait glisse parfaitement sur les parois d'une conduite, son profil de vitesse est uniforme sur une section droite de la conduite.

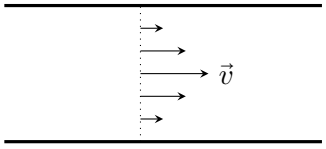


III.3. Fluide newtonien

Un **fluide newtonien** est un fluide qui s'écoule avec une **viscosité constante**.

La force de viscosité exercée par la paroi immobile d'une conduite annule la vitesse du fluide à proximité, on obtient alors la condition à la limite :

$$\vec{v}_{\text{proche de la paroi}} = \vec{0}.$$



Son profil de vitesse n'est alors pas uniforme sur une section droite de la conduite.

Dans le cas d'une paroi mobile à la vitesse $\vec{V}$ constante, on obtient la condition à la limite :

$$\vec{v}_{\text{proche de la paroi}} = \vec{V}.$$

Certains fluides ont des comportements plus complexes que les fluides newtoniens, leur viscosité peut par exemple dépendre de leurs agitations (mélange eau-Maïzena) ou des contraintes subies (dentifrice qui ne s'écoule pas sous son propre poids), on parle alors de fluides complexes ou de fluides non-newtoniens.